

# CAPITULO I

## “FUERZAS SOBRE EL VEHÍCULO”

### 1.1. GENERALIDADES

El comportamiento direccional de los vehículos durante su desplazamiento por la carretera define su respuesta a las acciones ejercidas por el conductor sobre el volante, así como a aquellas ejercidas por el medio, que pueden afectar a la dirección del movimiento: la fuerza centrífuga, viento e irregularidades de la calzada.

El conductor puede actuar, en forma sencilla y segura, para modificar ciertos parámetros en función de las condiciones en que circula el vehículo, éstos parámetros son los giros de las ruedas directrices respecto al eje de la rueda.

El automóvil en movimiento, está afectado por acciones del medio, y durante el período transitorio por lo que se relaciona con el movimiento lateral o transversal del vehículo respecto a su trayectoria, es decir, que el vehículo experimenta en su comportamiento direccional, problemas en la estabilidad de la dirección del movimiento frente a perturbaciones externas. Para realizar el análisis dinámico del vehículo es importante conocer un sistema de referencia empleado para el estudio de sus movimientos (*figura 1*).

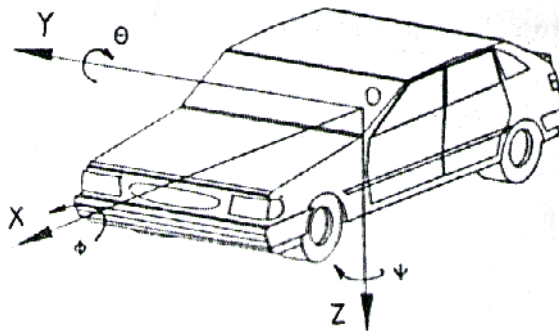


Figura 1. Tipos de ejes en el automóvil.

El movimiento en el eje X se denomina desplazamiento longitudinal, en el eje Y desplazamiento transversal o lateral y en el eje Z desplazamiento vertical.

La variación angular sobre el eje longitudinal es  $\phi$ , sobre el eje Y es  $\theta$  y sobre el eje Z es  $\Psi$ .

En el vehículo, la variación  $\phi$  es el ángulo de balanceo,  $\theta$  es ángulo de cabeceo y  $\Psi$  es ángulo de guiñada.

Los factores fundamentales que influyen en las características direccionales de un vehículo son:

- **Dimensionales:** La batalla ó distancia entre ejes.
- **Reparto de masas:** Posición del centro de gravedad; relación de masa suspendida y no suspendida.
- **Neumáticos:** Características laterales, es decir, la deriva y su variación en función de la carga, además los esfuerzos transversales.
- **Sistema de suspensión:** Características geométricas y dinámicas.
- **Medio:** Aire, calzada, coeficiente de adherencia.
- **Velocidad.**

Las variables que definen el movimiento lateral son tres:  $y$ ,  $\Psi$ ,  $\phi$  de los seis grados de libertad del vehículo considerado como cuerpo rígido.

Las vibraciones que la marcha del vehículo origina en la dirección  $z$  y movimientos angulares asociados  $\phi$ ,  $\theta$ , tienen su principal efecto en la sensación de confort de los pasajeros.

## **1.2. LA DERIVA**

Todo vehículo, sin causa aparente de deslizamiento, tiende a desplazarse lateralmente en una dirección y forma un ángulo  $\delta$  con la perpendicular a su eje de rotación o sea con la trayectoria de desplazamiento, ésta desviación direccional se llama deriva.

La deriva se debe a la deformación que sufre la banda de rodadura y los flancos del neumático cuando está sometido a esfuerzos transversales o laterales. En el neumático actúa una fuerza lateral  $F_l$  en dirección perpendicular al plano de la rueda, debido a la aceleración centrífuga en curvas o al empuje del aire.

El ángulo de deriva  $\delta$  está formado por las dos componentes de dirección, el movimiento teórico 1 y real ó efectiva 2. (figura 2)

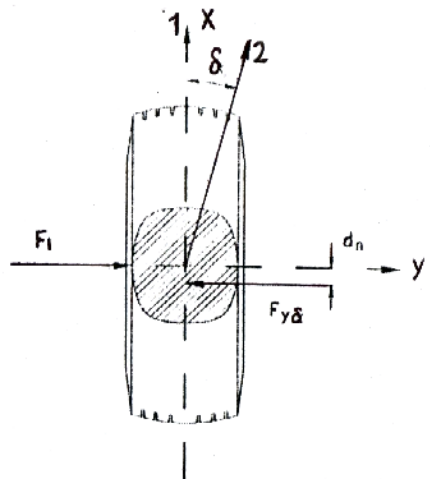


Figura 2. Angulo de deriva  $\delta$  en el neumático.

### 1.2.1. DERIVA EN RECTA

Cuando el vehículo está sometido a una fuerza lateral  $F_l$ , la parte del neumático en contacto con el terreno se mantiene en posición gracias a la adherencia del mismo, mientras que el resto de la rueda tiende a desplazarse por efecto de la fuerza que actúa sobre ella, lo cual origina una deformación trasversal en la huella producida por la resultante de ambas componentes y hacen que la rueda siga una trayectoria distinta a la deseada.

Cuando se circula a poca velocidad o la componente de fuerza lateral es pequeña, la deformación de la rueda es absorbida por la rigidez transversal del neumático que anula el

efecto de deriva; pero cuando la velocidad es alta o la componente de fuerza lateral es fuerte, la deriva se hace sensible, siendo preciso corregir constantemente la dirección para anular dicho efecto.

### **1.2.2. DERIVA EN CURVA**

Cuando el vehículo toma una curva, las ruedas delanteras toman la trayectoria curvilínea impuesta por la dirección, pero por la acción de las fuerzas perturbadoras que actúan sobre el automóvil, tales como; fuerza centrífuga, el viento, tracción, frenado, se produce un desplazamiento lateral ó deriva, que tiende a desviarlo de la trayectoria teórica a seguir.

En éste caso el desplazamiento lateral de las ruedas o efecto de deriva, modifica el centro de rotación del vehículo en dónde el centro de gravedad describe una trayectoria divergente con respecto a la dirección teórica, que tiende a salirse de la curva o carretera. (figura 3).

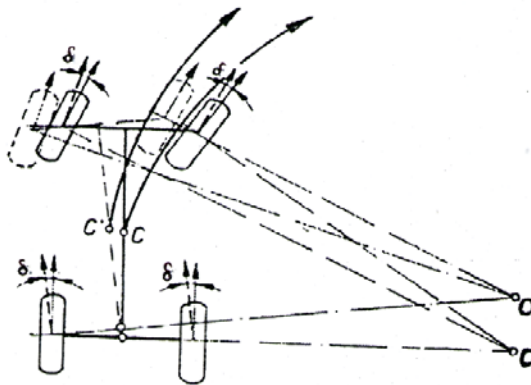


Figura 3. Deriva en curvas

### **1.2.3. COMPORTAMIENTO DEL NEUMÁTICO CON LA DERIVA**

#### **1.2.3.1. PROPIEDADES FISICOMECAICAS DEL NEUMATICO**

Bajo la acción de cargas externas del neumático sufre diversas deformaciones que afectan a las características de la deriva.

##### **1.2.3.1.1. DEFORMACIÓN DEL NEUMÁTICO BAJO LA ACCION DE LA CARGA NORMAL**

La carga normal que actúa sobre el neumático afecta de manera importante a la deriva.

La consideración de éste parámetro adquiere mayor importancia, en el estudio de la estabilidad y control de la trayectoria del vehículo, si se tiene en cuenta el efecto de transferencia de carga de unas ruedas a otras, tanto durante la circulación en curva o bajo los efectos de otras acciones laterales, como en los períodos de aceleración y frenado.

En la (figura 4) se representa la deformación del neumático por la acción de la carga normal  $G_r$  aplicada en la rueda. La deformación del neumático se expresa por la disminución de la distancia desde el eje de la rueda hasta su superficie de apoyo, en comparación con el radio «libre»  $r_0$  del neumático sin carga en un valor igual a  $h$ .

En este caso, entre el neumático y la superficie de apoyo se crea la superficie de contacto sobre la que accionan las reacciones normales del camino, que equilibran la carga transmitida por la rueda.

La magnitud  $h$  de variación de la altura en el perfil del neumático bajo carga se denomina deformación normal del neumático.

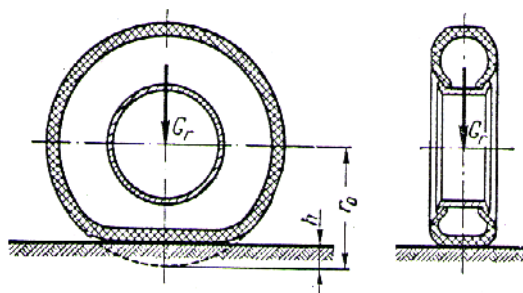


Figura 4. Deformación del neumático por acción de carga normal.

Durante la deformación del neumático disminuye un tanto el volumen ocupado en él por el aire, sin embargo, en comparación con el volumen total del aire, esta variación es insignificante, y, por consiguiente, se adopta que la deformación no ejerce influencia en la presión del aire en el neumático.

La relación:

$$\lambda_n = \frac{G_r}{h} \text{ }^1$$

En donde  $\lambda_n$  es el coeficiente medio (reducido) de rigidez del neumático en dirección normal y su unidad es kgf/mm es uno de los parámetros más importantes del neumático.

Su valor depende principalmente de la presión del aire en el neumático (cuando menor es la presión, mayor es la deformación normal del neumático y menor el coeficiente  $\lambda_n$ ), y de las dimensiones, estructura y materiales empleados para la fabricación del neumático (cuanto más rígida es la capa exterior del neumático, tanto mayor es el valor de  $\lambda_n$  correspondientemente).

Entre la deformación normal  $h$  y la carga  $G_r$  que acciona sobre la rueda, no existe una proporcionalidad directa.

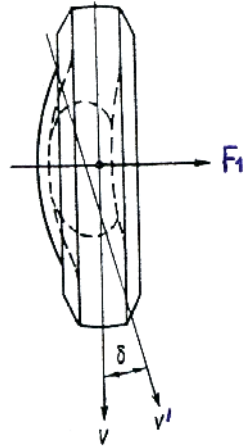
A medida que crece la carga la deformación aumenta cada vez más lentamente y, por ello, se puede hablar sobre un determinado valor del coeficiente  $\lambda_n$  únicamente al tratarse de una gama de variación de la carga  $G_r$  relativamente pequeña.

### **1.2.3.1.2. DEFORMACIÓN DEL NEUMÁTICO TRANSVERSAL (LATERAL)**

Si a una rueda en posición vertical (*figura 5*) cargada con una fuerza radial y que se mueve en el plano de su rotación en la dirección señalada por la flecha  $V$ , se le aplica la fuerza lateral  $F_l$  que accione a lo largo del eje de la rueda, esto provocará la deformación del perfil del neumático y el cambio de la forma de su contacto con el camino.

---

<sup>1</sup> Chudakov, D.A., Fundamentos de la teoría y el cálculo de tractores y automóviles. Pág. 44

Figura 5. Neumático con fuerza lateral  $F_1$ .

El perfil del neumático no sólo se deforma en la zona de contacto, sino también fuera de sus límites. Todo esto ocasiona el así llamado desvío lateral del neumático, lo que se expresa por el hecho de que la rueda se desvía de la dirección inicial y comienza a moverse bajo cierto ángulo  $\delta$  respecto a ella, como está representado en la (figura 5) con la flecha  $V'$ . El ángulo  $\delta$  se denomina ángulo de desvío lateral.

La relación:

$$K_{des} = \frac{F_1}{\delta}^2$$

dónde  $K_{des}$  es el coeficiente de resistencia al desvío lateral y se mide en kgf/grad.

La estructura y las medidas del neumático, así como la presión del aire que se utiliza en él, ejercen una influencia principal en la resistencia de los neumáticos al desvío lateral; el aumento de la presión del aire eleva la resistencia al desvío lateral.

La ecuación de resistencia al desvío lateral que determina la dependencia lineal entre los ángulos de desvío y las fuerzas laterales que actúan sobre la rueda, es únicamente válida hasta que el desvío tiene lugar sin resbalamiento lateral de los neumáticos.

<sup>2</sup> Chudakov, D.A., Fundamentos de la teoría y el cálculo de tractores y automóviles. Pág. 45

A ello le corresponden ángulos de desvío muy limitados que no exceden  $3-5^\circ$  para los neumáticos de coches de turismo. Siendo mayores los ángulos  $\delta$ , comienza el resbalamiento lateral del neumático que rápidamente se incrementa hasta convertirse en el derrape, cuando la fuerza lateral de adherencia entre el neumático y el camino se utiliza completamente.

### 1.2.3.2. ZONA DE CONTACTO DE DERIVA EN EL NEUMÁTICO

La fuerza  $F_l$  aplicada al eje de la rueda y  $F_{y\delta}$  aplicada en la zona de contacto de la banda de rodamiento con el suelo, producen la deformación transversal del neumático, (figura 6).

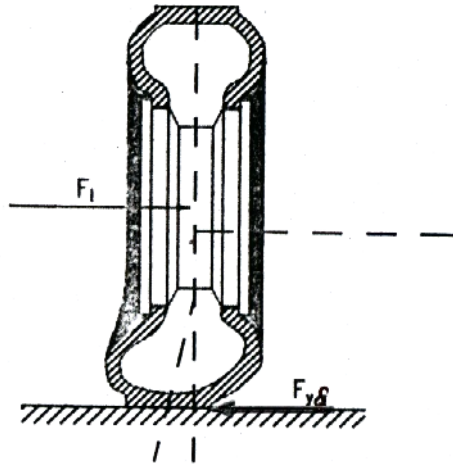


Figura 6. Deformación transversal del neumático.

Al rodar el neumático en éstas condiciones, un punto de su periferia se desplazará ligeramente de su posición indeformada, a medida que se acerca a el área de contacto  $Z_1$  (figura 7). Este desplazamiento se debe a la deformación de la carcasa exclusivamente.

Cuando siguiendo el movimiento de rotación de la rueda, penetra en la zona de contacto (posición  $M_1$ ), seguirá desplazándose transversalmente por la deformación de la carcasa, banda de rodamiento y un pequeño deslizamiento, hasta que alcanza una posición  $M_2$ , en el borde de la zona  $Z_2$ . En ésta zona la presión neumático-suelo es suficiente para evitar todo deslizamiento.



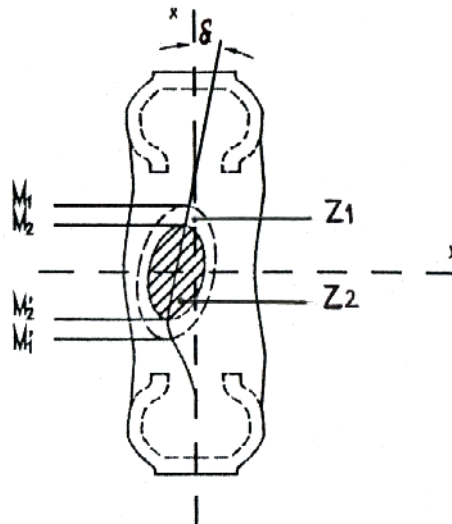


Figura 7. Forma de la huella producida por la deriva.

Durante su movimiento a través de la zona  $Z_2$ , la adherencia le impone una trayectoria recta  $M_2 - M_2'$  que forma con el plano de la rueda un ángulo  $\delta$ . Al abandonar la zona  $Z_2$  se produce nuevamente deslizamiento, en sentido opuesto, dentro de la zona  $Z_1$  y posteriormente continua su desplazamiento, fuera de la zona de contacto, hasta volver a la posición no deformada que le corresponde en el neumático.

Para valores pequeños el ángulo de deriva se produce un deslizamiento prácticamente despreciable y el segmento recto  $M_2 - M_2'$  se extiende a toda la zona de contacto. A medida que aumenta el ángulo de deriva, se incrementa el deslizamiento, siendo éste mucho más acentuado en la parte posterior de la huella de contacto.

### 1.2.3.3. MOMENTO AUTOALINEANTE

Se denomina momento autoalineante  $M_{z\delta}$  al producto de una distancia  $d_n$  denominada avance del neumático, por una fuerza transversal  $F_{y\delta}$  generada por la huella de contacto neumático-suelo, es decir,  $M_{z\delta} = F_{y\delta} * d_n$ . La fuerza lateral es igual y opuesta a  $F_l$  aunque no colineal con la proyección de ésta sobre el plano de rodadura.

El momento autoalineante respecto al eje vertical tiende a alinear el plano de la rueda con la dirección del movimiento, ayudando a las ruedas a volver a su posición original, al terminar de recorrer una curva.

#### **1.2.4. LA FUERZA CENTRÍFUGA SOBRE LA DERIVA**

La causa que más influye sobre la deriva o desviación direccional en las curvas es la fuerza centrífuga. Esta fuerza de componente normal al movimiento y aplicada al centro de gravedad del automóvil, depende de la masa  $m$  del mismo, velocidad de giro  $v$  y radio de la

curva  $R$ . Siendo  $F_c$  la fuerza centrífuga: 
$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$
<sup>3</sup>

Cuando la velocidad es pequeña y el radio de giro muy grande, la fuerza centrífuga o fuerza de comportamiento lateral que incide sobre el vehículo es de escasa importancia e influye ligeramente sobre la trayectoria impuesta por la dirección. Esta pequeña desviación es absorbida por la reacción elástica que oponen los neumáticos a ser arrastrados lateralmente.

Cuando la velocidad es grande o la curva muy cerrada, la desviación de trayectoria por efecto de la fuerza centrífuga se hace sensible y el conductor tiene que aumentar el radio de giro para compensar el desplazamiento lateral o deriva.

Este efecto puede llegar a ser crítico cuando se sobrepasa el límite de estabilidad, no dando tiempo al conductor a compensar con el volante el ángulo preciso para corregir la desviación de trayectoria, produciéndose, en éste caso, el derrape que hace que el vehículo se salga de la curva.

---

<sup>3</sup> SANZ GONZALEZ, Angel. Tecnología de la automoción. Pág. 305.

### **1.2.5. EL PESO SOBRE LA DERIVA**

El peso total sobre el automóvil, que resulta del peso propio más la carga, se considera repartido sobre sus dos ejes de sustentación y aplicado en el centro de gravedad del automóvil. (figura 8).

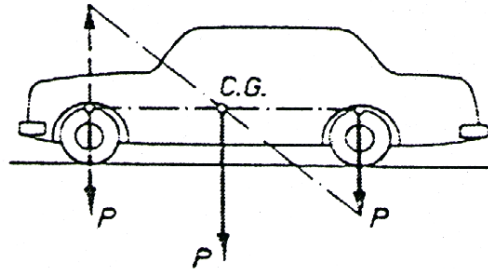


Figura 8. Peso total del vehículo aplicado al centro de gravedad y repartido en sus dos ejes.

El reparto de peso sobre los ejes, determina el centro de gravedad del vehículo y es de suma importancia para las características dinámicas del mismo y sobre todo para estudiar las variables que intervienen en la deriva.

Otra de las causas a tener en cuenta en la dinámica del movimiento es el desplazamiento de peso que se produce durante el frenado, donde aproximadamente un 70% del total se transfiere a las ruedas delanteras. Esto hace que las ruedas directrices se encuentren sobrecargadas y las traseras descargadas en el mismo porcentaje, lo que origina un desplazamiento del centro de gravedad del vehículo. Este efecto influye notablemente sobre la deriva en cada una de las ruedas y la fuerza centrífuga que actúa en curva sobre cada uno de los ejes.

### **1.3. VELOCIDAD DE DERRAPE**

Cuando un vehículo describe una trayectoria curva, la fuerza centrífuga, actuando sobre su centro de gravedad, a una altura  $h$  desde la superficie de rodadura, origina un esfuerzo

lateral, que debe ser compensado por las fuerzas de adherencia entre los neumáticos y el suelo y un momento de vuelco.

Al aumentar la velocidad, se incrementarán ambos efectos por lo que el vehículo puede perder su trayectoria, si la adherencia transversal es sobrepasada, o volcar, en ciertas condiciones.

Para obtener una primera aproximación se puede considerar que la suspensión es rígida o, lo que es lo mismo, que el desplazamiento del centro de gravedad, como consecuencia de la flexibilidad de la suspensión, ejerce una influencia despreciable. Así mismo, se supondrá que la calzada, en la curva, dispone de un peralte (*figura 9*) expresado por su ángulo de inclinación  $\zeta$  respecto de la horizontal.

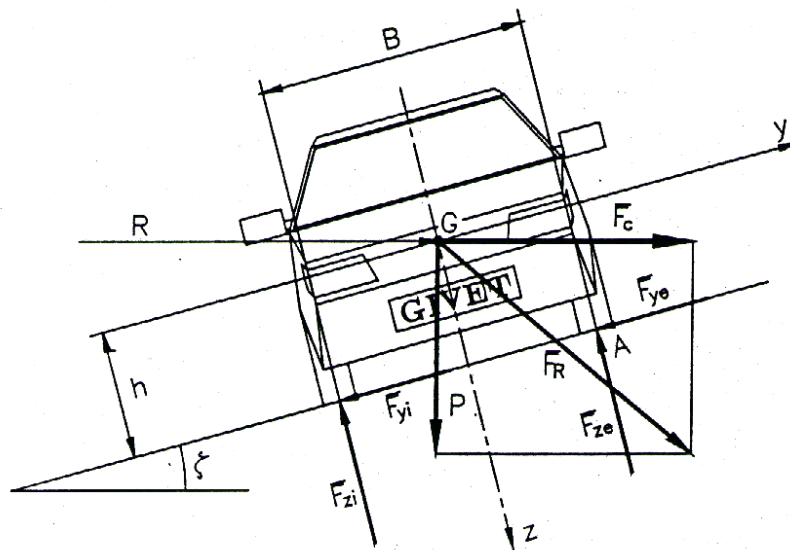


Figura 9. Esquema para el análisis y cálculo aproximado de la velocidad límite de derrape y vuelco.

- $B =$  Vía ó ancho del vehículo
- $R =$  Radio de la trayectoria del vehículo
- $G =$  Centro de gravedad del vehículo
- $h =$  Altura del centro del gravedad del vehículo
- $F_c =$  Fuerza centrífuga
- $P =$  Peso

$F_{zi}, F_{ze} =$  Fuerzas normales a la superficie de rodadura

$F_{yi}, F_{ye} =$  Fuerzas laterales

$\mu =$  coeficiente de adherencia entre neumático-piso

La velocidad límite de derrape:

$$v_{ld} = \sqrt{\frac{gR(\mu_{y\max} + tg\zeta)}{(1 - \mu_{y\max} tg\zeta)}} \quad 4$$

Si la curva no está peraltada  $\zeta = 0$

$$v'_{ld} = \sqrt{gR\mu_{y\max}} \quad 5$$

#### 1.4. VELOCIDAD DE VUELCO

La condición límite de vuelco, puede expresarse en la (figura 9) cuando la resultante,  $F_R$  de las fuerzas que actúan sobre el centro de gravedad del vehículo ( $P$  y  $F_c$ ), corta a la superficie de rodadura en el punto exterior de la huella contacto del neumático exterior (considerando el diagrama plano de la figura, punto A).

La velocidad límite de vuelco  $v_{lv}$ :

$$v_{lv} = \sqrt{\frac{gR(B/2h + tg\zeta)}{(1 - B/2htg\zeta)}} \quad 6$$

y para el caso de  $\zeta = 0$ :

$$v'_{lv} = \sqrt{gR(B/2h)} \quad 7$$

#### 1.5. ANALOGÍA ENTRE LA VELOCIDAD DE DERRAPE Y VELOCIDAD DE VUELCO

Si se compara la velocidad límite de derrape con la velocidad límite de vuelco peraltada y no peraltada respectivamente, puede comprobarse expresiones de las velocidades límite de

---

<sup>4, 5, 6, 7</sup> APARICIO IZQUIERDO, Francisco, VERA ALVAREZ, Carlos, DIAZ LOPEZ, Vicente. Teoría de los vehículos automóviles. Pág. 352.

derrape, y de vuelco, son formalmente análogas pudiéndose obtener una de la otra sin más que sustituir  $\mu_{y\max}$  por  $B/2h$ , o viceversa, lo que permite realizar el siguiente análisis:

- a) Si  $\mu_{y\max} = B/2h$  ;  $V_{ld} = V_{lv}$  Teóricamente ambos fenómenos, derrape y vuelco, sobrevendrían para el mismo valor de la velocidad, suponiendo valores determinados de  $R$  y  $\zeta$ .
- b) Si  $\mu_{y\max} > B/2h$  ;  $V_{ld} > V_{lv}$  Lo cual significa que el vehículo volcaría al alcanzar su velocidad un valor superior a  $V_{lv}$ , sin llegar a derrapar. Esta situación se presenta en vehículos cuyo centro de gravedad se encuentra a una altura elevada en relación con la vía, y siempre que la adherencia sea suficientemente alta. Puede presentarse en vehículos industriales sobre pavimento seco.
- c) Si  $\mu_{y\max} < B/2h$  ;  $V_{lv} > V_{ld}$  En estas condiciones el vehículo tenderá a derrapar antes que volcar. Es el caso de los turismos y de vehículos industriales circulando sobre calzadas con adherencia no muy elevada.

## **1.6. INFLUENCIA DEL DESLIZAMIENTO LATERAL DE LOS NEUMÁTICOS EN EL COMPORTAMIENTO DIRECCIONAL DEL VEHÍCULO**

Analicemos el giro del automóvil teniendo en cuenta el deslizamiento lateral de los neumáticos. El deslizamiento de los neumáticos durante el giro se origina bajo la acción de la componente lateral de la fuerza centrífuga y otras fuerzas laterales posibles (viento lateral, inclinación del camino, etc.).

En el caso general, los ángulos de deslizamiento de los neumáticos de las ruedas delanteras y traseras tienen diverso valor. Designémoslos respectivamente  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Los ángulos de

deslizamiento de los neumáticos derecho e izquierdo de las ruedas de cada eje pueden considerarse iguales. Como resultado del deslizamiento de los neumáticos, el movimiento de los ejes delantero y trasero se desvían de la trayectoria por la que ellos se desplazarían si no hubiera deslizamiento.

El eje trasero del vehículo marchará por la dirección del vector  $V_2$  (figura 10), inclinado bajo un ángulo  $\delta_2$  respecto al eje longitudinal del vehículo y, el eje delantero por la dirección del vector  $V_1$ , inclinado respecto al eje indicado bajo un ángulo  $\alpha - \delta_1$ , siendo  $\alpha$  el valor medio de los ángulos de giro de los ejes de las ruedas delanteras.

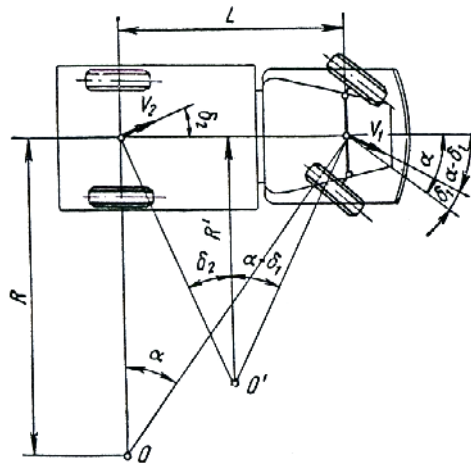


Figura 10 Esquema de giro del automóvil con desviación lateral de los neumáticos

El centro instantáneo de giro del vehículo se trasladará del punto  $O$ , donde él se hallaría al no haber deslizamiento lateral de los neumáticos, al punto  $O'$ , dispuesto en la intersección de las perpendiculares a los vectores de las velocidades  $V_2$  y  $V_1$ . A consecuencia de ello, el radio de giro del vehículo en lugar de  $R$  resulta ser  $R'$ .

El valor de  $R'$  se puede determinar:

$$R' = \frac{L}{\operatorname{tg} \delta_2 + \operatorname{tg}(\alpha - \delta_1)} \quad 8$$

<sup>8</sup> Chudakov, D.A., Fundamentos de la teoría y el cálculo de tractores y automóviles. Pág. 253.

Ya que los ángulos de deslizamiento son insignificantes y el deslizamiento lateral de los neumáticos puede tener un valor considerable únicamente al marchar a velocidades elevadas cuando los ángulos  $\alpha$  tampoco son grandes, aproximadamente se puede adoptar:

$$R' = \frac{L}{\alpha + \delta_2 - \delta_1} \quad ^9$$

Comparemos el valor del radio  $R'$  con el radio de giro  $R = \frac{L}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{L}{\alpha}$  <sup>10</sup>, que resultaría en condiciones análogas al no haber deslizamiento lateral de los neumáticos.

Si  $\delta_1 = \delta_2$ , entonces el deslizamiento lateral de los neumáticos no ejerce influencia en el radio de giro y su valor  $R' = R$ .

Si  $\delta_1 > \delta_2$ , entonces  $R' > R$ ; si  $\delta_1 < \delta_2$ , entonces,  $R' < R$ , o sea, en el primer caso el giro se efectuará por una curva más suave que con las ruedas que no tienen elasticidad lateral, y en el segundo caso, por una curva más abrupta. De esta manera, a consecuencia de la elasticidad de los neumáticos, la trayectoria del giro resulta depender no sólo de la posición de las ruedas dirigidas, sino también de la velocidad de marcha, del radio de giro y otros factores que influyen en el deslizamiento lateral de los neumáticos.

La correlación entre los radios  $R'$  y  $R$  caracteriza la facultad de giro del automóvil. En la teoría de automóviles se ha adoptado que siendo  $R' = R$ , el automóvil posee una facultad de giro normal; la propiedad del automóvil de marchar con un radio  $R' < R$  se denomina facultad de giro excesiva, y con un radio  $R' > R$ , facultad de giro insuficiente.

---

<sup>9, 10</sup> Chudakov, D.A., Fundamentos de la teoría y el cálculo de tractores y automóviles. Pág. 254.



Para una facultad de giro normal del automóvil el valor de los ángulos de desviación de las ruedas dirigidas de la posición neutral, necesaria para obtener el radio de giro requerido, no depende de la elasticidad lateral de los neumáticos y conserva su valor como si no hubiera deslizamiento lateral. No obstante, la trayectoria de giro puede ser en este caso diferente, ya que al variar el valor del deslizamiento lateral cambia la posición del centro de giro.

Siendo la facultad de giro insuficiente para obtener el radio de giro requerido, las ruedas dirigidas se tienen que desviar de la posición neutral a un ángulo mayor del que se necesitaría en las mismas condiciones en caso de no haber deslizamiento lateral de los neumáticos y, con una facultad de giro excesiva, a un ángulo menor.

En los automóviles con una facultad de giro excesiva, a medida que aumenta la velocidad de movimiento los ángulos de desviación de las ruedas dirigidas, necesarios para realizar el giro con un radio determinado, resultan ser cada vez menores y, por fin, puede crearse tal situación cuando el giro se realice con la posición neutral de las ruedas, sólo a cuenta del deslizamiento lateral de los neumáticos. Cuando además del deslizamiento tiene lugar el patinaje lateral de los neumáticos, para mantenerse el radio de giro prefijado el conductor se verá inclusive obligado a girar el volante en el sentido opuesto a la dirección de giro.

La facultad de giro también influye en su estabilidad de rumbo, o sea, en su capacidad de oponerse a un giro espontáneo y restituir la dirección de marcha preestablecida, si ella por una u otra causa fue perturbada. Analicemos desde este punto de vista el giro espontáneo de un automóvil bajo la acción de la fuerza  $F_l$  aplicada en su centro de gravedad, además, el reparto de cargas sobre cada eje del vehículo, hace que el centro de gravedad del mismo se

traslade hacia el eje delantero o trasero, cuando esto sucede se produce efectos subvirador, sobrevirador y neutro en el vehículo.

- **VEHÍCULO SOBREVIRADOR**

Si el automóvil (*figura 11*) posee facultad de giro excesiva entonces, como resultado del deslizamiento lateral de las ruedas delanteras a un ángulo  $\delta_1$  y de las traseras a un ángulo  $\delta_2$ , siendo  $\delta_2 > \delta_1$ , el centro de gravedad se traslada hacia el eje trasero, al ser mayor el peso en estas ruedas, incrementa aun más el ángulo de deriva en las mismas y por lo tanto un mayor arrastre lateral que en las delanteras, al pasar a la marcha curvilínea se origina una fuerza centrífuga  $F_c$ , dirigida en el mismo sentido que la fuerza lateral  $F_l$ .

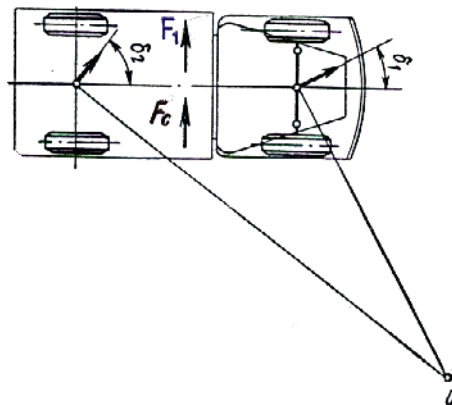


Figura 11. Automóvil con facultad de giro excesivo.

Como resultado de la adición de las fuerzas  $F_l$  y  $F_c$  (*figura 12*) los ángulos del deslizamiento aumentan, lo que acarrea la reducción del radio de la curva por la que marcha el automóvil.

La reducción del radio de giro provoca el ulterior aumento de la fuerza centrífuga y, como consecuencia, se acrecienta el deslizamiento, lo que ocasiona que el automóvil tienda a abrirse por detrás en las curvas, o sea, a cerrarse por delante.

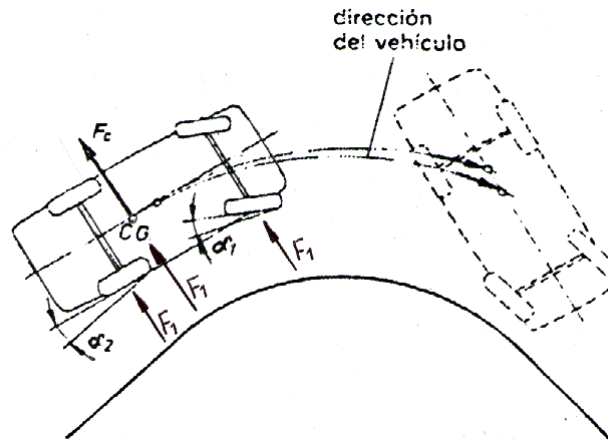


Figura 12. Efecto sobrevirador en el vehículo.

Si no se toman las medidas oportunas para restablecer la estabilidad en la dirección, como resultado, el automóvil marchará por una curva cuyo radio disminuirá constantemente. Para contrarrestar el deslizamiento, el conductor debe girar el volante en sentido contrario a la dirección de giro.

Un vehículo sobrevirador proporciona una respuesta muy sensitiva, pero presenta problemas de inestabilidad a grandes velocidades, teniendo que ser corregido el ángulo de dirección al acelerar en curva, o bajo acciones laterales, diferentes a los que intuitivamente puede predecir un conductor normal. Por esto es indeseable este tipo de comportamiento para condiciones normales de conducción.

Las desviaciones del eje trasero en curva, en el caso de los vehículos sobreviradores, al no poder controlar estas ruedas por ser ruedas no directrices, producen una mayor inestabilidad en el vehículo.

- **VEHÍCULO SUBVIRADOR**

Un automóvil con facultad de giro insuficiente (*figura 13*), para el cual  $\delta_1 > \delta_2$  comenzará a

marchar por una trayectoria curvilínea con centro de giro en O, dispuesto por el lado del automóvil hacia donde está dirigida la fuerza lateral  $F_l$ , que provoca el deslizamiento de los neumáticos.

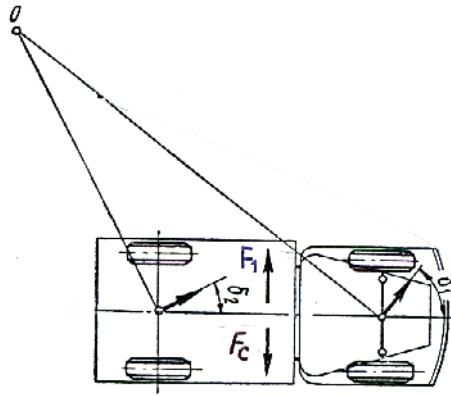


Figura 13. Automóvil con facultad de giro insuficiente.

El peso es mayor en el eje delantero que en el trasero, se incrementa el ángulo de deriva en las ruedas delanteras y por lo tanto un mayor desplazamiento lateral en las mismas.

Si el centro de gravedad del automóvil se traslada al eje delantero y considerando el movimiento transversal mencionado, entonces se produce el fenómeno subvirado que quiere decir, la tendencia del vehículo a abrirse por delante tomando una curva más abierta, que obliga al conductor a efectuar un mayor giro en el volante para tomar la curva.

Sin embargo, como la fuerza centrífuga, que se origina durante el giro, se opone en este caso a la fuerza  $F_l$  (figura 14) y obstaculiza el crecimiento de los ángulos de deslizamiento lateral con lo que se tiende a equilibrar en algo el deslizamiento transversal del neumático y con ello disminuye la tendencia del vehículo a abrirse por delante puesto que cuanto mayor es la velocidad de marcha, tanto más elevado es el valor de la fuerza  $F_c$  y tanto más eficaz su resistencia al deslizamiento de los neumáticos.

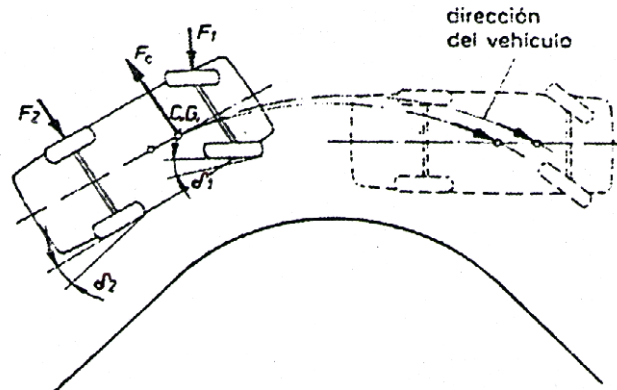


Figura 14. Efecto subvirador en el vehículo.

De esta manera, con una facultad de giro insuficiente, el automóvil está dotado de la capacidad de conservar la estabilidad de la dirección durante la curva, ya que el conductor tiene la capacidad de reestablecer la dirección para pequeñas tendencias del vehículo a abrirse por delante.

De la comparación de la dirigibilidad de los automóviles con diversas facultades de giro expuesta, se deduce que una facultad de giro excesiva, particularmente a grandes velocidades, reduce la estabilidad de rumbo y crea dificultades adicionales al manejar el automóvil. Por ello, en los automóviles de turismo se trata de tener una pequeña insuficiencia de la facultad de giro.

Esto se logra por medio de una serie de medidas relacionadas con la estructura del vehículo que favorecen el aumento del deslizamiento lateral de los neumáticos delanteros en comparación con los traseros; el centro de gravedad del automóvil se dispone un tanto más próximo al eje delantero, para aumentar aquella parte de la fuerza centrífuga que se transmite a las ruedas delanteras; en los neumáticos de las ruedas delanteras la presión es menor que en los de las ruedas traseras, etc.

El control de la dirección se realiza en las ruedas delanteras por lo que se vuelve favorable la corrección de la misma en vehículos subviradores, por la tendencia de las ruedas delanteras

a seguir la trayectoria impuesta por el eje trasero, de tal manera que se obtiene mejor estabilidad direccional.

En general, los automóviles modernos son diseñados y fabricados con comportamiento ligeramente subvirador, obteniendo de ésta manera una mayor estabilidad direccional.

- **VEHÍCULO NEUTRO**

Un vehículo neutro describirá una trayectoria de radio constante, durante la curva, si  $\delta_1 = \delta_2$ , el deslizamiento lateral de los neumáticos no ejerce influencia en el radio de giro y su valor  $R' = R$  por lo que su facultad de giro es normal, pero su problema es que cambios en las características de los vehículos, o sus condiciones operativas, pueden hacer que su comportamiento sea subvirador o sobrevirador.

### 1.6.1. RESPUESTA DIRECCIONAL EN RECTA

La respuesta direccional del vehículo con un ángulo de guiado de las ruedas directrices igual a cero, es decir, en trayectoria recta y un supuesto de empuje lateral.

El vehículo neutro seguirá una trayectoria recta pero desviada respecto al eje longitudinal del vehículo y el ángulo de desviación será el ángulo de deriva  $\delta_d$  y  $\delta_t$  en las ruedas delanteras y traseras respectivamente. (figura 15).

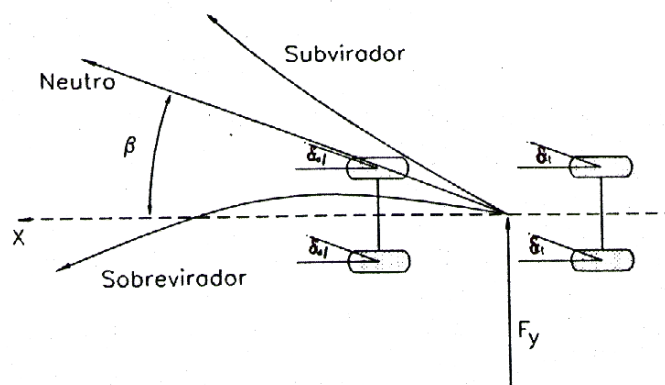


Figura 15. Respuesta direccional en recta.

Un vehículo subvirador, seguirá una trayectoria no recta, con ángulo de desviación creciente respecto a la trayectoria recta y en el sentido del empuje lateral. La reacción de un vehículo subvirador es más estable, con tendencia a corregirse solo.

Un vehículo sobrevirador, seguirá una trayectoria no recta, y en sentido contrario al de empuje lateral, es más inestable y precisa constante corrección por parte del conductor.

## **1.7. EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN**

Sobre el vehículo actúa un conjunto de acciones que excitan movimientos vibratorios, que pueden ser clasificadas en dos grupos tales como: acciones directas y en acciones indirectas.

Las acciones directas son ejercidas sobre la masa suspendida por elementos contenidos o apoyados en ella: motor y transmisión fundamentalmente. Son de carácter periódico, con modos fundamentales armónicos y posibilidad de originar fenómenos de resonancia.

Las acciones indirectas son las que se transmiten a la masa suspendida, a través de la suspensión, por acciones sobre las masas semisuspendidas. El paso de ruedas sobre irregularidades de la calzada origina una excitación de tipo normalmente aleatorio; en algunos casos se producen choques o percusiones motivadas por irregularidades aisladas como baches, etc.

Cada una de estas acciones excita vibraciones situadas en intervalos diferentes de frecuencias, que afectan a las masas suspendida y semisuspendida. El modo de frecuencia de la carrocería está por encima de 1 Hz y el modo de las masas no suspendidas está entre 10 y 20 Hz.

En el año de 1974 la ISO (International Standard Organization) publicó su norma 2631, que constituye una guía general para definir la tolerancia humana a las vibraciones, de utilización en los automóviles.

En la norma ISO-2631 <sup>11</sup> se define tres límites para el conjunto del cuerpo humano, que está comprendido en un intervalo de frecuencias de 1 a 80 Hz. Los límites se indican a continuación:

- **Límite de exposición.-**

Se refiere a valores por encima de los cuales existe riesgo para la salud. No debe ser sobrepasado excepto en casos excepcionales.

- **Límite de capacidad reducida por fatiga.-**

Hace referencia a la frontera a partir de la cual se produce un decrecimiento de capacidades para la realización eficaz de un trabajo, como conducir un automóvil, etc.

- **Límite de confort reducido.-**

En los vehículos de transporte está relacionado con la posibilidad de realizar funciones tales como lectura, escritura, comer, etc.

La tolerancia humana a las vibraciones depende de la dirección de éstas en relación al cuerpo humano. En dirección vertical la mayor sensibilidad se presenta para frecuencias

---

<sup>11</sup> APARICIO IZQUIERDO, Francisco,  
VERA ALVAREZ, Carlos, DIAZ LOPEZ, Vicente. Teoría de  
los vehículos automóviles. Pág. 469.



comprendidas entre 4 y 8 Hz, mientras que en direcciones transversales se reduce a frecuencias comprendidas entre 1 y 2 Hz.

### **1.7.1. REPRESENTACIÓN DE LA SUSPENSIÓN CON MODELO DE UN GRADO DE LIBERTAD**

Todas las vibraciones, en mayor o menor grado, se encuentran amortiguadas debido a las acciones de fuerzas de rozamiento.

Estas fuerzas pueden ser de diversos tipos, tales como las que tienen lugar entre sólidos rígidos, conocidos como de rozamiento seco o de Coulomb, o entre un sólido rígido y un fluido, o bien entre las propias moléculas de un sólido aparentemente elástico, rozamiento interno.

Un tipo de amortiguamiento utilizado en los automóviles de turismo es el denominado amortiguamiento viscoso, causado por el rozamiento fluido en regímenes de velocidad moderada.

Este amortiguamiento se caracteriza por el hecho de que la fuerza de rozamiento es directamente proporcional a la velocidad con que se mueve el sólido.

La suspensión independiente de un cuarto de vehículo se puede representar con un modelo de un grado de libertad (*figura 16*) y consta de una masa  $m$ , suspendida por un elemento elástico de rigidez  $K$ , y un elemento amortiguador de coeficiente  $c$ .

Se considera una fuerza variable en el tiempo,  $F(t)$ , que actúa sobre dicha masa.

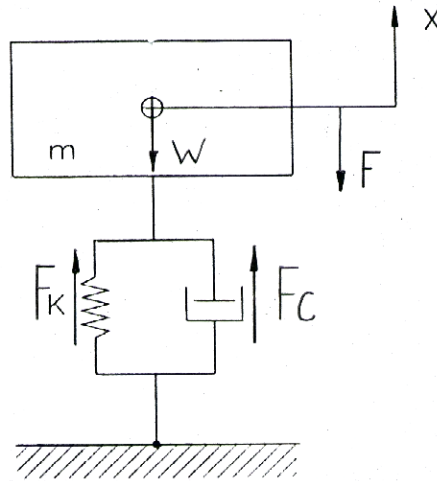


Figura 16. Vibración amortiguada con un solo grado de libertad

$$+\downarrow \sum Fx = ma_x$$

$$W - F_k - F_c + F = m\ddot{x}$$

$$mg - k(\delta + x) - c\dot{x} + F = m\ddot{x}$$

$$mg - k\delta - kx - c\dot{x} + F = m\ddot{x}$$

de dónde que  $mg = K\delta$ <sup>12</sup>, tenemos la ecuación de movimiento del sistema:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

Anulando la excitación, es decir haciendo  $F(t) = 0$ , la ecuación de movimiento queda en forma homogénea y puede resolverse:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

la solución de ésta ecuación es:

$$\omega^2 + \frac{c\omega}{m} + \frac{k}{m} = 0$$

A esta ecuación se la denomina ecuación característica del sistema y sus soluciones  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son:

$$\omega_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

<sup>12</sup> BEER, Ferdinand, JOHNSTON, E, Mecánica vectorial para Ingenieros. Dinámica. Pág. 1234.

siendo:

$$I = \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

El valor de  $I$  depende de que los valores numéricos dentro del radical sean positivos, nulos o negativos.

Si  $I = 0$ , el movimiento vertical tampoco es oscilatorio y la masa  $m$ , desciende hasta el valor cero, un poco más rápidamente.

Por último, cuando  $I$  es un número imaginario, la masa  $m$  realiza el movimiento vertical de una forma oscilatoria hasta alcanzar la posición de equilibrio.

En definitiva, para que el movimiento del sistema sea oscilatorio, es necesario que  $I$  sea un número imaginario.

Para que  $I$  sea imaginario se debe cumplir que:

$$(c/2m)^2 < K/m$$

En el caso especial de que  $I = 0$  se tiene:

$$(c/2m)^2 = K/m$$

El sistema tiene amortiguamiento crítico:

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Como en los vehículos  $c$  siempre debe ser menor que  $c_c$ , los valores de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  serán siempre números complejos.

$$\omega_{1,2} = \sigma + i\omega_n$$

en donde:

$$\sigma = -\frac{c}{2m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad 13$$

$\omega_n$  es la frecuencia fundamental de vibración del sistema amortiguado y  $\sigma$  el factor de amortiguamiento.

Si se define  $\xi$  como el cociente entre  $c$  y su valor crítico  $c_c$ :

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad 14$$

Dependiendo del valor de  $c$ , se puede distinguir tres situaciones:

a) **Amortiguamiento fuerte o supercrítico  $c > c_c$ :**

Las raíces  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de la ecuación característica del sistema, son reales y distintas, y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x = A e^{\omega_1 t} + B e^{\omega_2 t} \quad 15$$

que no corresponde a ningún movimiento vibratorio. Al ser  $\omega_1$  y  $\omega_2$  negativas, al aumentar el tiempo  $t$  indefinidamente, el valor de  $x$  tiende a cero. Sin embargo, un sistema real recobra su posición de equilibrio al cabo de un tiempo finito.

b) **Amortiguamiento igual al crítico  $c = c_c$ :**

La ecuación característica posee una raíz doble  $\omega = -\frac{c_c}{2m} = -p$ ,<sup>16</sup> y la solución general de la ecuación de movimiento es:

<sup>13, 14</sup> APARICIO IZQUIERDO, Francisco,  
VERA ALVAREZ, Carlos, DIAZ LOPEZ, Vicente. Teoría de  
los vehículos automóviles. Pág. 477 y 478.

$$x = (A + Bt)e^{-pt} \quad 17$$

Tampoco en éste caso se obtiene un movimiento vibratorio.

**c) Amortiguamiento débil o subcrítico  $c < c_c$ :**

Las raíces de la ecuación característica son complejas y conjugadas una de la otra, resultando una solución general de la ecuación de movimiento, de la forma:

$$x = e^{-(c/2m)t} (A \operatorname{sen} qt + B \cos qt) \quad 18$$

que puede escribirse como:

$$x = x_m e^{-(c/2m)t} \operatorname{sen}(qt + \phi) \quad 19$$

Cuyo movimiento es vibratorio con una amplitud decreciente con el tiempo.

### 1.7.1.1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA MODELO CON UN GRADO DE LIBERTAD

La ecuación  $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t)$  es la representación, en el dominio del tiempo, del modelo de un grado de libertad.

La ecuación de movimiento de un grado de libertad puede determinarse en el dominio de la frecuencia mediante la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace  $\ell$  convierte una ecuación diferencial en una algebraica, la primera representa al modelo en el dominio del tiempo, y la segunda lo hace en el dominio de la frecuencia. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación  $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t)$  se obtiene:

---

<sup>15,16, 17, 18, 19</sup> BEER, Ferdinand, JOHNSTON, E, Mecánica vectorial para Ingenieros. Dinámica. Pág. 1234 y 1235.

$$(ms^2 + cs + K)X(s) = F(s)$$

Esta es la ecuación expresada en el dominio de la frecuencia para posteriormente representarla en una función de transferencia a través de diagrama de bloques.

#### **1.7.1.1.1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CONSIDERANDO LA FUERZA EXTERNA $F(t)$**

De esta forma la ecuación  $(ms^2 + cs + K)X(s) = F(s)$  se puede transformar de la siguiente manera:

$$B(s) = (ms^2 + cs + K)$$

la ecuación  $(ms^2 + cs + K)X(s) = F(s)$  puede escribirse como:

$$B(s)X(s) = F(s)$$

Al aplicar la transformada de Laplace, se pasa del dominio del tiempo al de la frecuencia y, por lo tanto, los términos de la ecuación  $B(s)X(s) = F(s)$  se puede definir de la siguiente manera:

$F(s)$  = Representa, en el dominio de la frecuencia, la función de fuerza  $F(t)$ .

$X(s)$  = Representa, en el dominio de la frecuencia, la respuesta del sistema  $x(t)$

De la ecuación  $B(s)X(s) = F(s)$  se deduce que la respuesta del sistema, en el dominio de la frecuencia, puede definirse como:

$$X(s) = \frac{F(s)}{B(s)}$$

y la función de transferencia sería:

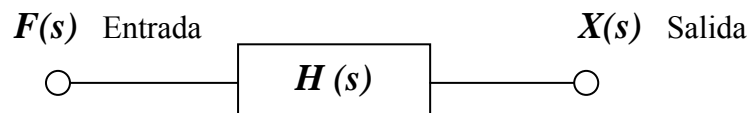
$$H(s) = \frac{1}{B(s)}$$

la respuesta del sistema  $X(s)$  en el dominio de la frecuencia, puede obtenerse como producto de la función de transferencia  $H(s)$  y de la excitación  $F(s)$ , es decir:

$$X(s) = H(s) \cdot F(s)$$

En otras palabras, la función de transferencia relaciona la transformada de Laplace de la respuesta del sistema, con la transformada de Laplace de una excitación del sistema, cuando las condiciones iniciales son todas nulas y no existe ninguna otra excitación externa.

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$$

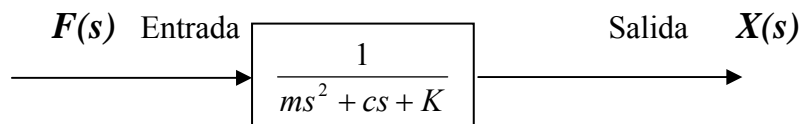


Función de Transferencia

Ahora, en la función de transferencia  $H(s) = \frac{1}{B(s)}$  sustituimos el valor de  $B(s)$  y se puede escribir así:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + K}$$

De dónde que la función de transferencia expresada en diagrama de bloques nos queda:



Función de Transferencia

El diagrama de bloques expuesto, nos representa un sistema de control cuyo objetivo consiste en controlar la salida o respuesta  $X(s)$  en dominio de la frecuencia, de una manera predeterminada por medio de la entrada ó señal de control  $F(s)$  y aplicando los elementos ó planta del sistema de control  $\frac{1}{ms^2 + cs + K}$ .

**1.7.1.1.2. FUNCION DE TRANSFERENCIA CON EXCITACION EXTERNA**

Una de las excitaciones exteriores de la suspensión es la irregularidad del camino de rodadura, que puede simularse como una entrada de velocidad,  $\dot{x}_0(t)$ , en la parte inferior del modelo, (figura 17).

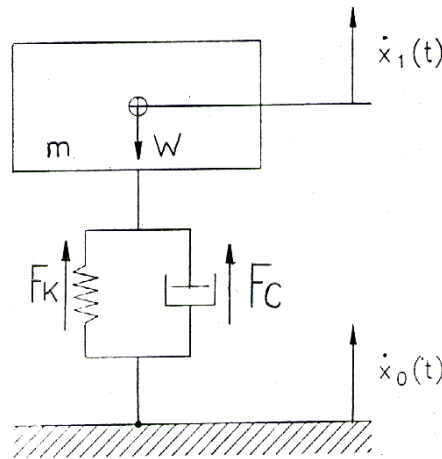


Figura 17. Esquema de un grado de libertad con entrada de  $\dot{x}_0(t)$

$$+\downarrow \sum F_x = ma_x$$

$$mg - K(x_1 - x_0) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) = m\ddot{x}$$

La ecuación diferencial del modelo presentado en la figura 17, es:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + K(x_1 - x_0) = mg$$

Para determinar la transferencia entre la respuesta  $\dot{x}_1(t)$  y la excitación  $\dot{x}_0(t)$ , hay que recordar que la función de transferencia es única entre una respuesta y una excitación, cuando todas las demás excitaciones son nulas, y, además, las condiciones iniciales deben ser todas nulas.

Luego, en este caso, hay que anular la excitación exterior debida al peso propio, con lo que la ecuación diferencial queda:

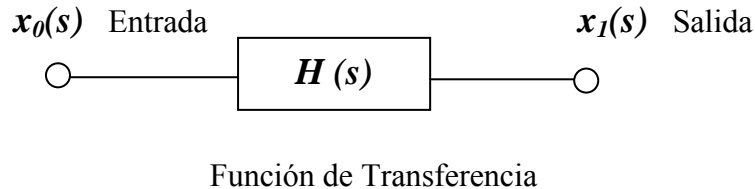
$$m\ddot{x} + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + K(x_1 - x_0) = 0$$



y aplicando la transformada de Laplace  $\ell$  se tiene:

$$x_1(s)(ms^2 + cs + K) - (cs + K)x_0(s) = 0$$

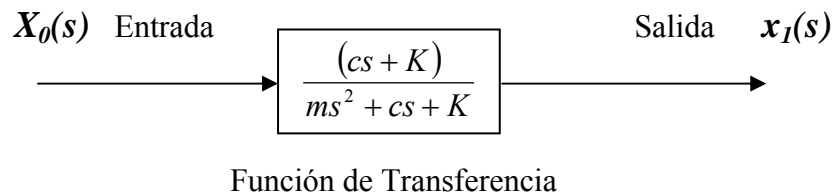
de dónde que  $\frac{x_1(s)}{x_0(s)}$  es igual a la función de transferencia  $H(s)$ :



El valor de  $H(s)$  es igual a:

$$H(s) = \frac{x_1(s)}{x_0(s)} = \frac{(cs + K)}{ms^2 + cs + K}$$

De dónde que la función de transferencia expresada en diagrama de bloques, con la excitación  $x_0(s)$  y la respuesta del sistema  $x_1(s)$ , tenemos:



En este sistema de control expresado en diagrama de bloques se puede controlar en función de la planta ó elementos del sistema de control  $\frac{(cs + K)}{ms^2 + cs + K}$  a la salida o respuesta del sistema  $x_1(s)$  en dominio de la frecuencia, de una manera predeterminada a través de la entrada ó señal de control  $x_0(s)$ .

### 1.7.2. DESPLAZAMIENTO DE LA MASA SUSPENDIDA SOBRE SUPERFICIE ONDULADA

A continuación se indica un modelo de masa suspendida del automóvil cuando se desplaza sobre superficie ondulada (*figura 18*) y se determinará el valor de la amplitud de movimiento de la masa suspendida para diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento  $c$ , tomando en cuenta los siguientes datos:

Longitud de onda = 6 metros.

Peso del automóvil con 5 pasajeros = 14715 N.

Amplitud de ondulación de la superficie = 0,035 m.

Rigidez del resorte de la suspensión :  $K = 130 \text{ KN/m}$

Relación de amortiguamiento, considerando el confort del automóvil:  $\zeta = 0.25$

Velocidad del automóvil:  $110 \text{ Km/h} = 29.7 \text{ m/s}$

Además se considera que en los estudios realizados sobre el confort, es conocido la frecuencia fundamental  $\omega_n$  de un sistema de suspensión que debe encontrarse alrededor de  $1\text{-}2 \text{ Hz}$  y que su relación de amortiguamiento debe tener un valor de  $\zeta = 0.25$

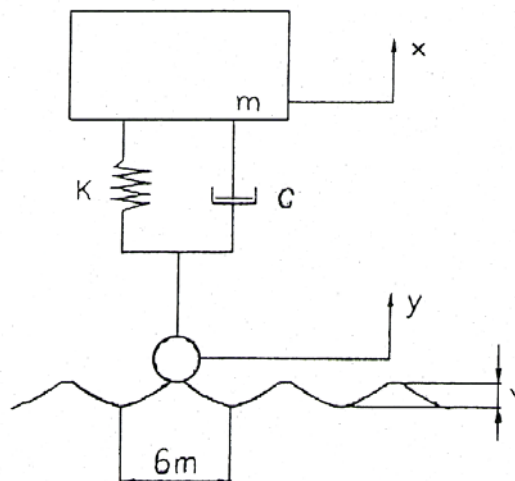


Figura 18. Esquema de vibración amortiguada sobre superficie ondulada

La ecuación para determinar la amplitud de movimiento  $X$  de la masa suspendida del automóvil viene dada por:

$$X = \left[ \frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right]^{1/2} * Y^{20}$$

dónde  $\xi$  es la relación de amortiguamiento,  $r$  es la relación de frecuencias y  $Y$  es la amplitud de ondulación de la superficie.

Amortiguamiento crítico:  $C_c = 2m\omega_n = 2\sqrt{Km}$

$$C_c = 2\sqrt{130 * \left(\frac{14.7}{9.81}\right)}$$

$$C_c = 27,91424 \frac{KN * s}{m}$$

Relación de amortiguamiento:  $\xi = 0.25 = \frac{C}{C_c}$

$$C = \xi * C_c$$

$$C = 0.25 * 27.91424$$

$$C = 7 \frac{KN * s}{m}$$

Frecuencia fundamental de la vibración libre amortiguada:  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$

$$\omega_n = \frac{\sqrt{\left(\frac{130}{1,5}\right) - \left(\frac{7}{2 * 1,5}\right)^2}}{2 * 3.1415}$$

$$\omega_n = 1,4344Hz$$

<sup>20</sup> APARICIO IZQUIERDO, Francisco,  
VERA ALVAREZ, Carlos, DIAZ LOPEZ, Vicente. Teoría de los vehículos automóviles.

La Frecuencia de Excitación  $\omega$ , a 100 Km/h = 100\*0.27 = 29,7 m/s y una longitud de onda

$l_o = 6m$ . es:

$$\omega = \frac{V}{l_o} \quad 21$$

$$\omega = \frac{29,7}{6}$$

$$\omega = 4,95Hz$$

Relación de frecuencias:  $r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad 22$

$$r = \frac{4,95}{1,4344}$$

$$r = 3,450919$$

con los valores calculados, introducimos en la fórmula de amplitud de movimiento de la

$$\text{masa suspendida } X = \left[ \frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right]^{1/2} * Y$$

$$X = \left[ \frac{1 + (2 * 0,25 * 3,450919)^2}{(1 - 3,450919^2)^2 + (2 * 0,25 * 3,450919)^2} \right]^{1/2} * Y$$

$$X = 0,154870 * Y$$

La amplitud de movimiento del automóvil, con una amplitud de ondulación del terreno de

0,035m es:

$$X = 0,154870 * 35 \quad X = 5,420475mm$$

<sup>21, 22</sup> APARICIO IZQUIERDO, Francisco,  
VERA ALVAREZ, Carlos, DIAZ LOPEZ, Vicente. Teoría de  
los vehículos automóviles. Pág. 547.

El valor de  $X = 5.42 \text{ mm}$  de desplazamiento de la masa suspendida del automóvil, para un valor de  $c = 7 \text{ KN*s/m}$  y una frecuencia fundamental  $\omega_n = 1.43 \text{ Hz}$  nos indica que bajo las condiciones antes mencionadas del automóvil sobre superficie ondulada, la suspensión brinda confort a los pasajeros de éste automóvil, pues los datos obtenidos cumplen con el rango de los valores de 1-2 Hz de frecuencia fundamental que debe tener un sistema de suspensión para que brinde confort y con un valor de  $\xi = 0.25$

La tabla de continuación nos indica diferentes valores de desplazamiento ó amplitud de movimiento de la masa suspendida del automóvil, para diferentes valores del factor de amortiguamiento  $c$ :

X (mm)	$\xi$	C (KN*s/m)	Cc (KN*s/m)	$\omega$ (Hz)	$\omega_n$ (Hz)	$r = \omega/\omega_n$
5,420475	0,250768	7	27,914242	4,95	1,4344	3,450919
5,505963	0,259724	7,25	27,914242	4,95	1,430901	3,459359
5,588978	0,268668	7,5	27,914242	4,95	1,427269	3,468161
5,669413	0,277636	7,75	27,914242	4,95	1,423505	3,477332
5,747178	0,286592	8	27,914242	4,95	1,419607	3,48688
5,822195	0,295548	8,25	27,914242	4,95	1,415574	3,496814
5,894399	0,304504	8,5	27,914242	4,95	1,411405	3,507144
5,963738	0,31346	8,75	27,914242	4,95	1,407098	3,517878
6,03017	0,322416	9	27,914242	4,95	1,402653	3,529027
6,093659	0,331372	9,25	27,914242	4,95	1,398068	3,540601
6,154181	0,340328	9,5	27,914242	4,95	1,393341	3,552611
6,211718	0,349284	9,75	27,914242	4,95	1,388472	3,56507
6,266258	0,35824	10	27,914242	4,95	1,383459	3,577989
6,317795	0,367196	10,25	27,914242	4,95	1,378299	3,591383
6,366326	0,376152	10,5	27,914242	4,95	1,372992	3,605265
6,411856	0,385108	10,75	27,914242	4,95	1,367536	3,619649
6,45439	0,394064	11	27,914242	4,95	1,361929	3,634551
6,493939	0,40302	11,25	27,914242	4,95	1,356169	3,649988
6,530514	0,411976	11,5	27,914242	4,95	1,350254	3,665978
6,56413	0,420932	11,75	27,914242	4,95	1,344182	3,682537
6,594802	0,429888	12	27,914242	4,95	1,337951	3,699687
6,622549	0,438844	12,25	27,914242	4,95	1,331559	3,717447
6,647388	0,4478	12,5	27,914242	4,95	1,325003	3,73584
6,669338	0,456756	12,75	27,914242	4,95	1,318282	3,754888
6,688418	0,465712	13	27,914242	4,95	1,311391	3,774617
6,704647	0,474668	13,25	27,914242	4,95	1,30433	3,795053
6,718045	0,483624	13,5	27,914242	4,95	1,297094	3,816223
6,72863	0,49258	13,75	27,914242	4,95	1,289681	3,838157

6,73642	0,501536	14	27,914242	4,95	1,282089	3,860887
6,74368	0,519448	14,5	27,914242	4,95	1,26635	3,908871
6,739948	0,53736	15	27,914242	4,95	1,249851	3,960473
6,725322	0,555272	15,5	27,914242	4,95	1,23256	4,016032
6,699875	0,573184	16	27,914242	4,95	1,214444	4,075941
6,725322	0,555272	15,5	27,914242	4,95	1,23256	4,016032
6,616633	0,609008	17	27,914242	4,95	1,175581	4,210685
6,558796	0,62692	17,5	27,914242	4,95	1,154746	4,286659
6,490044	0,644832	18	27,914242	4,95	1,132907	4,369292
6,319145	0,680656	19	27,914242	4,95	1,085972	4,558128
6,101934	0,71648	20	27,914242	4,95	1,034198	4,78632
5,834999	0,752304	21	27,914242	4,95	0,976813	5,067499
5,512897	0,788128	22	27,914242	4,95	0,912762	5,423101
5,127027	0,823952	23	27,914242	4,95	0,840521	5,889205
4,663407	0,859776	24	27,914242	4,95	0,757751	6,532485
4,097624	0,8956	25	27,914242	4,95	0,660507	7,494241
3,380847	0,931424	26	27,914242	4,95	0,541039	9,149068
2,383091	0,967248	27	27,914242	4,95	0,378876	13,06497
---	1,003072	28	27,914242	4,95	---	---
---	1,038896	29	27,914242	4,95	---	---
---	1,07472	30	27,914242	4,95	---	---
---	1,25384	35	27,914242	4,95	---	---
---	1,43296	40	27,914242	4,95	---	---
---	1,61208	45	27,914242	4,95	---	---
---	1,7912	50	27,914242	4,95	---	---

Cuando el amortiguamiento es menor al crítico  $c < c_c$  las raíces de la ecuación característica son complejas y conjugadas una de la otra cuyo movimiento es vibratorio con una amplitud decreciente con el tiempo.

Con indica la tabla, en el caso de amortiguamiento igual al crítico  $c = c_c$  ó un amortiguamiento fuerte o supercrítico  $c > c_c$  en éste caso, la ecuación característica posee una raíz doble  $\omega = -\frac{c_c}{2m}$  ó son reales y distintas respectivamente que no corresponde a ningún movimiento vibratorio. Al ser  $\omega_1$  y  $\omega_2$  negativas, al aumentar el tiempo  $t$  indefinidamente, el valor de  $x$  tiende a cero.

1.7.2.1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA SUSPENSIÓN SOBRE SUPERFICIE ONDULADA.

Para un automóvil que circula sobre una carretera ondulada  $y = Y \sin \omega t$  se va a representar la suspensión (figura 19) como un sistema de control a través de diagrama de bloques, para lo cual se comienza analizando la ecuación de movimiento como sigue:

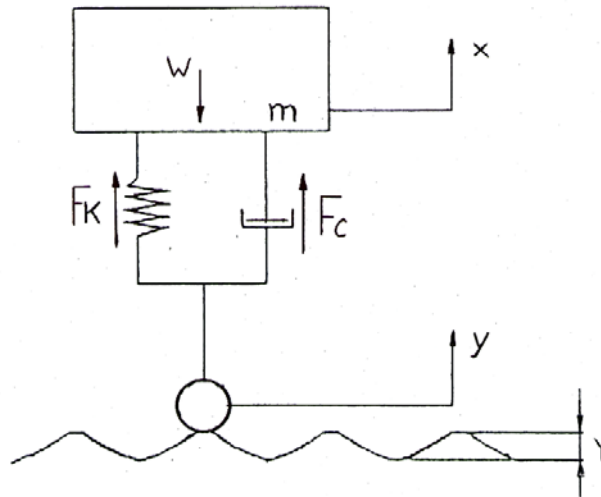


Figura 19. Suspensión sobre superficie ondulada.

$$+\downarrow \sum F_x = ma_x$$

$$W - F_k - F_c = m\ddot{x}$$

$$mg - K(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y}) = m\ddot{x}$$

La función de transferencia es única entre su respuesta y excitación, además las condiciones iniciales son todas nulas por lo que la excitación exterior debida al peso propio hay que anular es decir que  $mg = 0$

$$m\ddot{x} + Kx - Ky + c\dot{x} - c\dot{y} = 0$$

$$m\ddot{x} + Kx + c\dot{x} = +Ky + c\dot{y}$$

como:  $y = Y \sin \omega t$   
 $\dot{y} = Y \omega \cos \omega t$

reemplazando los valores  $y$ ,  $\dot{y}$  en la ecuación anterior:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = cY\omega \cos \omega t + KY\sin \omega t$$

$$A = KY$$

$$B = \omega cY$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = A\sin \omega t + B \cos \omega t$$

de ésta última ecuación de movimiento en el dominio del tiempo, se pasa luego a la transformada de laplace, aplicando las reglas de transformada de laplace de derivadas:

$$\ell[F(t)] = F(s)$$

$$\ell(f') = s\ell(f) - f(0)$$

$$\ell(f'') = s^2\ell(f) - sf(0) - f'(0)$$

$$m[s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + c[sx(s) - x(0)] + Kx(s) = A\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) + B\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right)$$

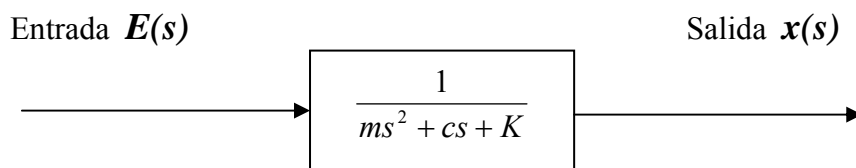
$$(ms^2 + cs + K)x(s) = A\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) + B\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right)$$

$$\frac{x(s)}{A\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) + B\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right)} = \frac{1}{(ms^2 + cs + k)}$$

$$E(s) = A\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) + B\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right)$$

$$\frac{x(s)}{E(s)} = \frac{1}{(ms^2 + cs + k)}$$

Expresando la función de transferencia en diagrama de bloques nos queda:



FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA



La señal de entrada al sistema viene dada por la excitación de la carretera en forma ondulada  $y = Y \sin \omega t$  en el dominio del tiempo, y por  $E(s)$  en el dominio de la frecuencia, mientras el sistema se controla en la planta  $\frac{1}{(ms^2 + cs + k)}$  y se obtiene la respuesta en frecuencia en  $x(s)$ .